Concursul Fractal

A Șasea Ediție, 21 Septembrie 2025

Problema 1. Copiii din clasa lui Viorel s-au împărțit în perechi (fiecare băiat este în pereche cu câte o fată) și au plecat în livadă la bunelul lui să culeagă mere. Se știe că pentru fiecare pereche de copii, băiatul a cules fie de două ori mai multe mere, fie de două ori mai puține mere decât fata și că fiecare copil a cules cel mult 100 de mere.
a) Dacă au fost culese în total 2025 de mere, care este numărul minim de copii în clasa lui Viorel?
b)Ar fi putut copiii culege 2026 de mere?

Soluție: Pentru fiecare pereche de copii, cineva a cules de două ori mai multe mere decât perechea sa. Astfel, dacă copilul care a cules numărul minim de mere a cules x mere, perechea sa a cules $2x$, deci în total au cules $3x$, un număr divizibil la 3. Astfel, cum fiecare pereche a cules în total un număr divizibil la 3 de mere, numărul total de mere culese e divizibil la 3, și clar nu poate fi 2026. La fel, cum în fiecare pereche, copilul ce a cules numărul maxim de mere a cules dublul celuilalt, fiecare pereche de copii a cules maxim 150 de mere, iar dacă am avea cel mult 13 perechi de copii, numărul total de mere cules ar fi cel mult $13 \cdot 150 < 2025$, deci avem măcar 14 perechi, în care sunt 28 de copii. Ca să vedem că 28 de copii sunt de ajuns, facem ca primii 13 băieți din clasă să culeagă câte 100 de mere, și ultimul 50 și la fel, 13 fete să culeagă câte 50 de mere, și ultima 25.

Problema 2. Suma câtorva numere consecutive este 100, găsiți toate posibilitățile pentru aceste numere.

Soluție: Presupunem că primul termen este $a \in \mathbb{N}$ și sunt $k \geq 1$ termeni consecutivi. Atunci suma este $a + (a+1) + \cdots + (a+k-1)$, ce se calculează ca: $S = \dfrac{k(2a+k-1)}{2}$. Dorim să rezolvăm $S = 100$, deci obținem ecuația $k(2a+k-1) = 200$. Pentru fiecare divizor k al lui 200 verificăm dacă $2a = \dfrac{200}{k} - k + 1$ este un număr par și conduce la $a \geq 1$. Obținem soluțiile:

1. $k = 1 \implies a = 100$, șirul: 100. 2. $k = 5 \implies a = 18$, șirul: $18, 19, 20, 21, 22$. 3. $k = 8 \implies a = 9$, șirul: $9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$.

Problema 3. Dacă din produsul câtorva numere naturale consecutive scădem 1, obținem un pătrat perfect. Găsiți aceste numere.

Soluție: Dacă sunt cel puțin trei numere consecutive, produsul lor e divizibil la 3, iar un pătrat perfect nu poate da restul 2 la împărțire la 3. Dacă avem două numere, să zicem a și $a+1$ ecuația devine $a(a+1)-1=x^2$, și e clar că pentru a mai mare decât 1, $(a+1)^2$ este mai mare decât x^2 care este mai mare decât a^2, ce nu e posibil. Concludem că $a=1$ și numerele sunt 1 și 2.

Problema 4. Marius și Alexandru au cumpărat 11 pachete cu nucușoare de la magazin. Arătați că fiecare dintre ei poate mânca câteva pachete cu nucușoare la alegere (astfel încât cel puțin un pachet este mâncat) astfel încât dacă la final Marius a mâncat x nucușoare și Alexandru a mâncat y, $x - y$ se împarte fără rest la 2025.

Soluție: Vom vedea inițial câte modalități de a lua și a mânca pachete sunt. Pentru fiecare pachet, putem alege dacă să-l mâncăm sau nu în două modalități, deci în total avem 2^{11} opțiuni de a mânca, din care trebuie să scădem 1 fiindcă o modalitate este de a nu mânca nimic. Dacă există două modalități în urma cărora se obține același rest la împărțire la 2025, excludem din acestea nucușoarele comune, iar Marius mănâncă în prima modalitate și Alexandru în a doua. Dacă nu sunt două modalități ce dau același rest la împărțire la 2025, avem în total 2025 de resturi, deci maxim 2025 de modalități, dar $2^{11} - 1$ este strict mai mare decât 2025, o contradicție.